Лекция 2

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ

1. Контрпример

В предыдущей лекции нам удалось определить решение для того случая, когда правая часть $f(x)$ уравнения (1.1) имеет разрывы.*) Ну, а что будет, если разрывна функция $p(x)$? (Это предположение также не является абсурдным. Например, при трактовке уравнения (1.1) как уравнения равновесия, $p(x)$ есть модуль Юнга и если разные части сжимаемого бруса изготовлены из разных материалов, то вполне естественно, что коэффициент $p(x)$ будет кусочно-постоянным). Разумеется, в смысле определения 1.1 задача (1.1), (1.2) в этом случае решения иметь не будет. Однако, не будет она иметь решения и в смысле определения 1.2. Чтобы пояснить последнее, рассмотрим следующий

Пример 1. Пусть в (1.1)

$$p(x) = \begin{cases} p_1 = \text{const} > 0, & 0 < x < \xi, \\ p_2 = \text{const} > 0, & \xi < x < 1, \end{cases} \qquad q(x) \equiv 0, \quad f(x) \equiv 1. \tag{1}$$

Формально поделив уравнение (1.1), (1) при $x \in (0,\xi) \bigcup (\xi, 1)$ на $p(x)$, мы приходим к задаче из примера 1.4 с $f_i = 1/p_i$ и решением (1.10), которое

*) При ссылках на формулы, теоремы, определения и т.д. из других лекций будем указывать одновременно и номер лекции и номер формулы. Например, запись (4.11) будет означать, что имеется в виду формула (11) из четвертой лекции.

в нашем случае записывается в виде

$$u(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} x[1/p_2 - x/p_1 + \xi(2-\xi)(1/p_1 - 1/p_2)], & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ (1-x)[x/p_2 + \xi^2(1/p_1 - 1/p_2)], & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{2}$$

Эта функция принадлежит $H^2(I) \bigcap H_0^1(I)$, но все же не является решением задачи (1.1), (1), (1.2) в смысле определения 1.2, ибо для нее не выполняется уравнение (1.17). Не выполняется несмотря на то, что $Lu - f = 0$ при $x \in (0,\xi) \bigcup (\xi, 1)$ и, следовательно,

$$\int_0^\xi (Lu - f)v dx + \int_\xi^1 (Lu - f)v dx = 0. \tag{3}$$

Докажем это утверждение. Так как $u(x)$ из (2) принадлежит $C^1(\overline{I})$, а $p(x)$ разрывна в точке $x = \xi$, то $p(x)u'(x)$ также разрывна в этой точке (если, конечно, $u'(\xi) \neq 0$). Но чтобы подставить $u(x)$ в уравнение (1.17) нужно функцию $p(x)u'(x)$ продифференцировать. В рамках классической теории этого сделать нельзя, однако можно вычислить обобщенную производную этой функции, которая определяется при помощи соотношения (1.13). Итак, $Lu - f$ есть обобщенная функция, т.е. линейный непрерывный функционал, который на любой функции из $C_0^\infty(I)$ задается соотношением $(Lu - f, v)$. С учетом вида (1.1) оператора L имеем

$$(Lu - f, v) = -\left(\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right), v\right) + (qu - f, v), \tag{4}$$

а по определению обобщенной производной

$$\left(-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right), v\right) = \left(p\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\right). \tag{5}$$

Второе слагаемое правой части (4) и правая часть (5) представляют собой обобщенные функции, порожденные обычными локально суммируемыми функциями и, следовательно,

$$(Lu - f, v) = \int_0^1 (pu'v' + quv - fv) dx. \tag{6}$$

Преобразуем правую часть (6) при помощи интегрирования по частям. Имеем

$$\int_0^1 (pu'v' + quv - fv)dx =$$
$$= \int_0^\xi (pu'v' + quv - fv)dx + \int_\xi^1 (pu'v' + quv - fv)dx =$$
$$= \int_0^\xi [-(pu')' + qu - f]vdx + pu'v|_0^\xi + \int_\xi^1 [-(pu')' + qu - f]vdx + pu'v|_\xi^1.$$

Так как $v(0) = v(1) = 0$, а $u'(\xi)$ и $v(x)$ непрерывны при $x = \xi$, то отсюда и из (6), (3) заключаем, что

$$(Lu - f, v) = \int_0^\xi (Lu - f)vdx + \int_\xi^1 (Lu - f)vdx+ \tag{7}$$
$$+p(x)u'(x)v(x)|_{x=\xi-0} - p(x)u'(x)v(x)|_{x=\xi+0} = (p_1 - p_2)u'(\xi)v(\xi) \neq 0.$$

Поскольку это соотношение противоречит (1.17), то функция $u(x)$ из (2) не является решением почти всюду задачи (1.1), (1), (1.2).

Замечание 1. Из (7) следует, что если коэффициент $p(x)$ разрывен в точке $x = \xi$, а $u(x) \in H^2(I)$, то $Lu - f$ представляет собой сингулярную обобщенную функцию, именно, сосредоточенную в точке $x = \xi$ дельта-функцию Дирака, умноженную на скачок $p(x)$ в этой точке и $-u'(x)$, ибо согласно (1.12)

$$[p(\xi - 0) - p(\xi + 0)]u'(\xi)v(\xi) =$$
$$= -[p(\xi + 0) - p(\xi - 0)](u'(x)\delta(x - \xi), v(x)).$$

2. Задача о минимуме квадратичного функционала. Обобщенное решение

Прежде чем давать новое расширение понятия решения, делающее разрешимой и задачу (1.1), (1), (1.2), рассмотрим так называемую задачу о минимизации функционала. Введем в рассмотрение *квадратичный функционал*

$$J(w) := \frac{1}{2}\int_0^1 \left[p(x)\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + q(x)w^2\right]dx - \int_0^1 f(x)w dx. \tag{8}$$

Пусть $p(x)$ и $q(x)$ суммируемы и ограничены на I, а $f(x) \in L_2(I)$. Тогда функционал (8) непрерывен на $H^1(I)$. Будем предполагать, что $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям (1.3) и поставим *задачу минимизации* об отыскании функции $u(x) \in H_0^1(I)$, доставляющей минимум функционалу (8)

$$u(x) \in H_0^1(I): \quad J(u) = \inf_{w \in H_0^1(I)} J(w). \tag{9}$$

Введем в рассмотрение *билинейную форму*

$$a(v, w) := \int_0^1 [p(x)v'(x)w'(x) + q(x)v(x)w(x)]dx, \tag{10}$$

т.е. форму, линейную по каждому из своих двух аргументов, и *линейную форму*

$$l(w) := \int_0^1 f(x)w(x)dx. \tag{11}$$

Очевидно, что билинейная форма $a(v, w)$ *симметрична*, а в силу (1.3) отвечающая ей *квадратичная форма* неотрицательна, т.е.

$$a(v, w) = a(w, v), \quad a(v, v) \geqslant 0. \tag{12}$$

С использованием (10), (11) функционал (8) можно представить в виде

$$J(w) = \frac{1}{2}a(w, w) - l(w). \tag{13}$$

Наряду с задачей (9) о минимизации функционала (13) введем в рассмотрение следующую задачу: среди функций $H_0^1(I)$ найти такую, которая при любой функции $v(x) \in H_0^1(I)$ удовлетворяет уравнению

$$a(u, v) = l(v). \tag{14}$$

Более коротко сформулированная задача записывается так: найти

$$u(x) \in H_0^1(I): \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(I). \tag{15}$$

Задача (15) называется *вариационной задачей*, а уравнение (14) — *вариационным уравнением*. Имеет место

Теорема 1. *Задача минимизации* (9) *и вариационная задача* (15) *эквивалентны.*

Доказательство. 1°. Пусть $u(x)$ — решение задачи минимизации (9). Покажем, что $u(x)$ одновременно является решением и вариационной задачи (15). Представим произвольную функцию $w \in H_0^1(I)$ в виде $w = u + tv$, где t — числовой параметр, а v — тоже произвольная функция. На основании (12)

$$a(w, w) = a(u + tv, u + tv) = a(u, u) + 2ta(u, v) + t^2 a(v, v)$$

и, следовательно, с учетом (13)

$$J(w) = J(u) + t[a(u, v) - l(v)] + \frac{t^2}{2} a(v, v).$$

Тем самым, $J(u + tv)$ как функция t при фиксированных $u(x)$ и $v(x)$ есть квадратичный многочлен, минимум которого достигается там, где его первая производная

$$\frac{d}{dt} J(u + tv) = [a(u, v) - l(v)] + ta(v, v)$$

обращается в нуль. С другой стороны в силу (9)

$$J(u) \leqslant J(u + tv)$$

и, следовательно, $J(u + tv)$ как функция t имеет минимум в точке $t = 0$. Сопоставляя эти два факта, находим, что минимум реализуется при выполнении условия $a(u, v) - l(v) = 0$. Тем самым, $u(x)$ — решение вариационной задачи (15).

2°. Пусть теперь $u(x)$ — решение вариационной задачи (15). Докажем, что $u(x)$ минимизирует функционал (13). Оценим значение этого функционала снизу. Как и выше, с учетом (12) и (13) находим, что

$$J(w) = J(u + v) = J(u) + [a(u, v) - l(v)] + \frac{1}{2} a(v, v).$$

По предположению $u(x)$ есть решение вариационной задачи и, следовательно, выражение в квадратных скобках обращается в нуль. Тем самым,

$$J(w) = J(u) + \frac{1}{2} a(v, v).$$

Но в силу (12) $a(v,v)$ неотрицательна и, следовательно,

$$J(w) \geqslant J(u).$$

А это и означает, что $u(x)$ минимизирует $J(w)$. $\square$

Замечание 2. При доказательстве теоремы 1 практически нигде не использовался конкретный вид $a(u,v)$ и $l(v)$, равно как и конкретный вид пространства, где ищется решение. Единственная апелляция к виду $a(v,v)$ была вызвана необходимостью обоснования ее неотрицательности. Тем самым, утверждение об эквивалентности указанных формулировок остается справедливым и при других реализациях $a(u,v)$ и $l(v)$ и для решений из других пространств, лишь бы на этих пространствах $a(v,v)$ была неотрицательна.

Теорема 2. *Решение почти всюду задачи* (1.1), (1.2) *доставляет минимум функционалу* (8) *в* $H_0^1(I)$. *Функция* $u(x) \in H^2(I) \bigcap H_0^1(I)$, *минимизирующая* $J(w)$, *является решением почти всюду задачи* (1.1), (1.2).

Доказательство. В силу теоремы 1 задача минимизации и вариационная задача эквивалентны. Поэтому для доказательства теоремы достаточно сопоставления решения задачи (1.1), (1.2) с решением вариационной задачи (15). Пусть $u(x) \in H^2(I) \bigcap H_0^1(I)$ — решение задачи (1.1), (1.2). Рассмотрим выражение

$$a(u,v) - l(v) = \int_0^1 (pu'v' + quv)dx - \int_0^1 fvdx,$$

где $v \in H_0^1(I)$. В первом слагаемом первого интеграла можно произвести интегрирование по частям, перебросив производную с $v(x)$ на $(p(x)u'(x))$. Предполагая, что $v(x) \in H_0^1(I)$, будем иметь

$$a(u,v) - l(v) = \int_0^1 [-(pu')' + qu - f]vdx =$$
$$= \int_0^1 (Lu - f)vdx \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Но в силу (1.17) правая часть этого соотношения равна нулю, т.е.

$$a(u,v) - l(v) = 0$$

и, следовательно, $u(x)$ удовлетворяет вариационному уравнению (14). Так как, к тому же, $u(x)$ удовлетворяет граничным условиям (1.2) и достаточно гладкая (не хуже $H^2(I)$), то $u(x) \in H_0^1(I)$ и, следовательно, является решением вариационной задачи (15).

В другую сторону. Пусть $u(x)$ — достаточно гладкое решение вариационной задачи (15): $u(x) \in H^2(I) \bigcap H_0^1(I)$. Тогда

$$0 = a(u, v) - l(v) = \int_0^1 (pu'v' + quv)dx - \int_0^1 fvdx.$$

Снова можно произвести интегрирование по частям, что приводит к соотношению

$$\int_0^1 (Lu - f)vdx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(I),$$

повторяющему соотношение (1.17), которое и определяет решение почти всюду. □

Из теоремы 2 следует, что в предположениях (1.3), (1.5) теоремы 1.2 относительно коэффициентов задача минимизации (9) и краевая задача (1.1), (1.2) эквивалентны. Но решение задачи минимизации может существовать и при менее жестких предположениях. В частности, для постановки этой задачи нет необходимости предполагать дифференцируемость и даже непрерывность коэффициента $p(x)$. Если при этих условиях решение задачи минимизации (9) (а, следовательно, и вариационной задачи (15)) существует, то можно объявить его решением и задачи (1.1), (1.2).

Определение 1. Функция $u(x)$ называется *обобщенным решением* задачи (1.1), (1.2), если она является решением вариационной задачи (15).

Теорема 3. *Если $p(x)$ и $q(x)$ суммируемы и ограничены, а $f(x) \in L_2(I)$, то при выполнении условий* (1.3) *обобщенное решение задачи* (1.1), (1.2) *существует и единственно.*

Замечание 3. Уравнение (14) с $a(u, v)$ и $l(v)$ из (10), (11), при помощи которого мы определили обобщенное решение задачи (1.1), (1.2), было введено нами как условие минимума функционала (13). Однако это уравнение можно получить и иным путем, не связанным с задачей минимизации. Именно, умножая уравнение (1.1) на функцию $v(x) \in H_0^1(I)$ и интегрируя результат по I, после интегрирования по частям получим (14). Такой подход можно использовать для определения обобщенного решения и в том случае, когда эквивалентная задача о минимизации функционала отсутствует. Например, для уравнения

$$-(pu')' + r(x)u' + q(x)u = f(x) \tag{16}$$

с граничными условиями (1.2) вариационное уравнение имеет вид

$$\int_0^1 (pu'v' + ru'v + quv)dx = \int_0^1 fvdx. \tag{17}$$

Замечание 4. В вариационном исчислении функционал

$$\frac{d}{dt} J(u+tv)|_{t=0}$$

называется первой вариацией функционала J и обозначается δJ, а уравнение (1.1) называется *уравнением Эйлера* функционала (8).

Замечание 5. Условия (1.3) обеспечивают не только неотрицательность квадратичной формы $a(v,v)$, как это отмечено в (12), но и ее положительную определенность в $H_0^1(I)$. Доказательство этого факта будет дано в лекции 11.

3. Главные и естественные граничные условия

Рассмотренная нами краевая задача (1.1), (1.2) называется *первой краевой задачей*, а краевые условия (1.2) — *краевыми условиями первого рода*. Обратимся к другим краевым задачам для уравнения (1.1).

Пусть требуется найти решение уравнения (1.1), которое удовлетворяет краевым условиям

$$u'(0) = u'(1) = 0. \tag{18}$$

Краевая задача (1.1), (18) называется *второй краевой задачей*, а краевые условия (18) — *краевыми условиями второго рода*. Чтобы задача (1.1), (18) была однозначно разрешима нужно дополнить условия (1.3) требованием

$$q(x) \not\equiv 0. \tag{19}$$

Вариационная формулировка задачи (1.1), (18) такова: найти

$$u(x) \in H^1(I): \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(I), \tag{20}$$

где $a(u, v)$ и $l(v)$ задаются соотношениями (10) и (11), соответственно. Обобщенным решением задачи (1.1), (18) называется решение вариационной задачи (20).

Существенное различие в вариационных формулировках для первой и второй краевых задач состоит в том, что решение второй краевой задачи ищется среди *всех* функций $H^1(I)$, в то время как в случае первой краевой задачи (1.1), (1.2) решение ищется среди $H_0^1(I)$, т.е. среди функций, удовлетворяющих граничным условиям (1.2). Функции, среди которых ищется решение задачи (20) "свободны"на концах отрезка I и не обязаны удовлетворять каким бы то ни было граничным условиям. В этой связи про краевые условия (18) говорят, что они естественные. Краевые условия (1.2) *называют главными.*

Таким образом, *естественными граничными условиями* называются такие условия, которым должно удовлетворять решение краевой задачи и не обязаны удовлетворять функции, среди которых имеется решение при вариационной постановке задачи. Те же граничные условия, которым должны удовлетворять и решение краевой задачи и функции, среди которых ищется решение при вариационной формулировке, называются *главными.*

Пусть теперь требуется найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0) = g_0, \quad p(1)u'(1) + \varkappa u(1) = g_1. \tag{21}$$

Как мы уже говорили, первое из условий (21) есть краевое условие первого рода, в то время как второе из них — это *краевое условие третьего рода*. Если бы на обоих концах были заданы краевые условия третьего рода, то задача называлась бы *третьей краевой задачей.* В нашем же случае это *смешанная краевая задача*. Условия (1.3), дополненные требованием

$$\varkappa \geqslant 0, \tag{22}$$

достаточны для однозначной разрешимости задачи (1.1), (21).

Чтобы дать вариационную постановку смешанной задачи (1.1), (21) нужно задать новые по сравнению с (10), (11) билинейную и линейную формы и определить множество, в котором следует искать решение вариационного уравнения.

Пусть $v(x) \in C^1(\overline{I})$. Умножая (1.1) на $v(x)$ и интегрируя по частям, находим, что

$$\int_0^1 (pu'v' + quv)dx - p(1)u'(1)v(1) + p(0)u'(0)v(0) = \int_0^1 fvdx. \qquad (23)$$

Билинейную форму из левой части (23), заданную первоначально на $C^2(\overline{I}) \times C^1(\overline{I})$, продолжить на $H^1(I) \times H^1(I)$ нельзя, ибо, если $u \in H^1(I)$, то $u' \in L_2(I)$, и говорить о значениях $u'(0)$ и $u'(1)$ бессмысленно. Однако $u'(1)$ в силу (21) из (23) можно исключить. Применительно к $u'(0)$ такие соображения не проходят, и мы просто волевым порядком положим $v(0) = 0$. В силу сказанного соотношение (23) примет вид

$$\int_0^1 (pu'v' + quv)dx + \varkappa u(1)v(1) = \int_0^1 fvdx + g_1 v(1). \qquad (24)$$

Теперь билинейную форму из левой части можно продолжить на $H^1(I) \times H^1(I)$, поскольку на основании леммы 11.1 функции из $H^1(I)$ непрерывны, и их значения в точках имеют смысл. Соотношение (24) и есть искомое вариационное уравнение.

Пусть

$$a_1(u,v) = a(u,v) + \varkappa u(1)v(1), \qquad (25)$$

$$l_1(v) = l(v) + gv(1), \qquad (26)$$

где $a(u,v)$ и $l(v)$ заданы (10) и (11) соответственно. В новых обозначениях вариационное уравнение (24) примет вид

$$a_1(u,v) = l_1(v). \qquad (27)$$

Ну, а где искать решение этого уравнения? Разумеется, в $H^1(I)$, но не во всем. Решение дифференциальной задачи (1.1), (21) подчинено главному граничному условию $u(0) = g_0$. Поэтому и решение вариационного уравнения должно этому условию подчиняться. Обозначим через

$$H_E^1(I) := \left\{ v(x) \in H^1(I) \;\middle|\; v(0) = g_0 \right\}$$

множество функций из пространства $H^1(I)$, которые удовлетворяют первому из граничных условий (21). В этом множестве и будем искать решение вариационного уравнения (27). Что же касается функций $v(x)$, то с ними мы уже определились: они должны принадлежать $H^1(I)$ и обращаться в нуль при $x = 0$.

Пусть

$$\tilde{H}^1(I) := \{v(x) \in H^1(I) \,|v(0) = 0\}. \tag{28}$$

В свете вышесказанного вариационная формулировка задачи (1.1), (21) принимает вид: найти

$$u(x) \in H^1_E(I): \quad a_1(u, v) = l_1(v) \quad \forall v \in \tilde{H}^1(I). \tag{29}$$

Мы показали, что, если функция $u(x)$ является решением дифференциальной задачи (1.1), (21), то она дает решение и вариационной задачи (29). Докажем теперь, что на самом деле при $u(x) \in C^2(I)$ эти задачи эквивалентны, т.е. и решение вариационной задачи (29) является решением задачи (1.1), (21). В самом деле, производя в $a_1(u, v)$ интегрирование по частям, преобразуем уравнение (29) к виду

$$\begin{aligned} &\int_0^1 [-(pu')' + qu] v dx + [p(1)u'(1) + \varkappa u(1)]v(1) = \\ &= \int_0^1 f v dx + g_1 v(1) \; \forall v \in \widetilde{H}^1(I). \end{aligned} \tag{30}$$

Если дополнительно предположить, что $v(x) \in H^1_0(I) \subset \widetilde{H}^1(I)$, то в (30) внеинтегральные члены исчезают, а уравнение примет вид

$$\int_0^1 [-(pu')' + qu] v dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in H^1_0.$$

Отсюда следует, что $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1), а уравнение (30) сводится к

$$[p(1)u'(1) + \varkappa u(1)]v(1) = g_1 v(1) \quad \forall v \in \widetilde{H}^1(I).$$

При $v(1) \neq 0$ отсюда вытекает второе из граничных условий (21). Первое же граничное условие (21) выполняется в силу того, что $u \in H^1_E(I)$. Эквивалентность обеих задач установлена. Более того, установлено, что граничное условие третьего рода из (21) является естественным.

Замечание 6. Несмотря на, казалось бы, не слишком обоснованное решение положить $v(0) = 0$ мы пришли к правильной постановке вариационной задачи. На самом деле это предположение является вполне естественным. Если бы для задачи (1.1), (21) вместо вариационной задачи мы ставили эквивалентную ей задачу минимизации, то последняя приняла бы вид: найти

$$u(x) \in H_E^1(I): \; J_1(u) = \inf_{w \in H_E^1(I)} J_1(w),$$
$$J_1(w) := \frac{1}{2} a_1(w, w) - l_1(w).$$

Условие обращения в нуль вариации функционала $J_1(w)$ совпадает с вариационным уравнением (29), где $v(x)$ есть вариация $u(x)$, т.е. та функция, которую нужно прибавить к $u(x)$, чтобы получить $w(x)$. Но и $u(x)$ и $w(x)$ принадлежат $H_E^1(I)$, и поэтому вариация $v(x)$ при $x = 0$ обязана обращаться в нуль. Эти рассуждения и заставляют нас всегда полагать $v(0) = 0$, когда в точке $x = 0$ задано главное граничное условие, однородное или неоднородное.

4. Условия на разрыве

Выясним, каким условиям удовлетворяет обобщенное решение в точках разрыва коэффициента $p(x)$. Пусть функция $p(x)$ имеет единственную точку разрыва $x = \xi$, т.е. $p(\xi - 0) \neq p(\xi + 0)$, а на $(0, \xi)$ и $(\xi, 1)$ непрерывно дифференцируема. Из (15), (10), (11) находим, что

$$0 = a(u, v) - l(v) = \int_0^1 (pu'v' + quv - fv) dx =$$
$$= \int_0^\xi (pu'v' + quv - fv) dx + \int_\xi^1 (pu'v' + quv - fv) dx.$$

Используя теперь для преобразования слагаемых с производными интегрирование по частям и принимая во внимание (1.1), (1.2), будем иметь

$$0 = \int_0^\xi [-(pu')' + qu - f]v dx + pu'v|_{x=\xi-0} +$$
$$+ \int_\xi^1 [-(pu')' + qu - f]v dx - pu'v|_{x=\xi+0} =$$
$$= -[p(\xi+0)u'(\xi+0) - p(\xi-0)u'(\xi-0)]v(\xi),$$

ибо $v(x)$ непрерывна как всякая функция из $H^1(I)$.*) Так как, вообще говоря, $v(\xi) \neq 0$, то в точке разрыва коэффициента $p(x)$ должно выполняться условие

$$p(\xi+0)u'(\xi+0) - p(\xi-0)u'(\xi-0) = 0,$$

т.е. функция $p(x)u'(x) = -w(x)$ — поток в этой точке — должна быть непрерывной. Ясно, что если $p(x)$ непрерывна, то это условие остается справедливым, но упрощается до условия непрерывности функции $u'(x)$. Итак, обобщенное решение имеет непрерывную производную только в точках непрерывности $p(x)$.

Для непосредственного отыскания обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений в точке разрыва коэффициента $p(x)$ нужно поставить еще одно условие для $u(x)$. Принимая во внимание, что $u(x) \in H_0^1(I)$, а, следовательно, непрерывна на I и в точке $x = \xi$, в частности, заключаем, что обобщенное решение в точке разрыва коэффициента $p(x)$ удовлетворяет следующим условиям

$$[u]|_{x=\xi} \equiv u(\xi+0) - u(\xi-0) = 0, \quad [pu']|_{x=\xi} = 0, \tag{31}$$

которые иногда называют *условиями сопряжения*.

Легко проверить, что функция $u(x)$, удовлетворяющая уравнению (1.1), (1) при $x \in (0,\xi) \bigcup (\xi,1)$, граничным условиям (1.2) и условиям сопряже-

---

*) Доказательство этого факта будет дано в лекции 11.

ния (29), является обобщенным решением этой задачи и имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} \dfrac{x}{p_1} \left[\dfrac{\xi(1-\xi)(p_1-p_2)}{p_1(1-\xi)+p_2\xi} + 1 - x \right], & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \\ \dfrac{1-x}{p_2} \left[\dfrac{\xi(1-\xi)(p_2-p_1)}{p_1(1-\xi)+p_2\xi} + x \right], & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{32}$$

У читателя может возникнуть совершенно законный вопрос: а не являются ли условия сопряжения (31) слишком надуманными в угоду математической стройности теории? Оказывается, нет. Именно такие условия возникают в реальных прикладных задачах. В самом деле, обратимся, например, к тепловой интерпретации уравнения (1.1). Известно, что температура $u(x)$ является непрерывной функцией координаты x. Вне зависимости от того, непрерывен или разрывен коэффициент теплопроводности $p(x)$, непрерывным является и тепловой поток $w(x) = -p(x)u'(x)$. Тем самым, при тепловой интерпретации уравнения (1.1) условия сопряжения (31) являются вполне естественными. Аналогичная ситуация имеет место и для других прикладных задач.

5. Упражнения

1. Доказать, что при достаточной гладкости коэффициентов задачи (1.1), (18) и (20) эквивалентны.

2. Указать дифференциальную формулировку следующей вариационной задачи:

$$u \in H^1(I): \quad a_2(u,v) = l_2(v) \quad \forall v \in H^1(I),$$

где

$$\begin{aligned} a_2(u,v) &= a(u,v) + \varkappa_0 u(0)v(0) + \varkappa_1 u(1)v(1), \\ l_2(v) &= l(v) + g_0 v(0) + g_1 v(1), \end{aligned}$$

а $a(u,v)$ и $l(v)$ определены в (10), (11).

3. Сформулировать задачу минимизации функционала (8), эквивалентную вариационной задаче (20).

4. Доказать, что решение вариационной задачи (20) при достаточной гладкости коэффициентов является решением задачи (1.1), (18).

5. Убедиться, что функция (32) в самом деле есть обобщенное решение задачи (1.1), (1), (1.2).

6. Найти обобщенное из $H^1(I)$ решение следующей задачи:

$$(p_1u')' = 0, \quad 0 < x < 1/2, \quad (p_2u')' = 0, \quad 1/2 < x < 1,$$
$$u(0) = 0, \quad p_2u'(1) + \varkappa u(1) = g,$$

где p_1 и p_2 — положительные постоянные.

7. Найти обобщенное решение следующей задачи:

$$u \in \widetilde{H}^1(I) : \int\limits_0^{1/2} p_1u'v'dx + \int\limits_{1/2}^{1} p_2u'v'dx + \varkappa u(0)v(0) = gv(0) \quad \forall v \in \widetilde{H}^1(I),$$

где $p_i = \mathrm{const}$, а $\widetilde{H}^1(I) = \left\{v(x) \in H^1(I) \middle| \quad v(1) = 0\right\}$.

8. Дать вариационную формулировку и найти обобщенное из $H^1(I)$ решение следующей задачи:

$$(pu')' = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1,$$

где

$$p = \begin{cases} p_1 = \mathrm{const}, & 0 < x < 1/2, \\ p_2 = \mathrm{const}, & 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

9. Вариационное уравнение имеет вид

$$\int_0^1 u''v''dx = \int_0^1 fv\,dx. \tag{33}$$

Какому дифференциальному уравнению оно отвечает?

10. Решение вариационного уравнения (33) при $x = 0$ подчинено одной из следующих пар граничных условий

$$u(0) = u'(0) = 0; \quad u(0) = u''(0) = 0;$$
$$u(0) = u'''(0) = 0; \quad u'(0) = u''(0) = 0;$$
$$u'(0) = u'''(0) = 0; \quad u''(0) = u'''(0) = 0.$$

Рассортировать эти граничные условия по принципу главные — естественные.

11. Поставить вариационную задачу, если

$$u^{IV} = f, \quad x \in (0,1), \quad u'(0) = g_1, \quad u'''(0) = g_2, \quad u''(1) = u'''(1) = 0.$$